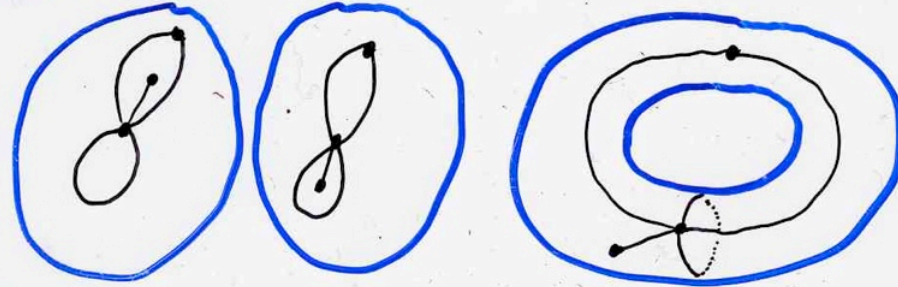


GÉNÉRATION DES CARTES ET HYPER-
CARTES. UNE DANS CHAQUE CLASSE
D'ISOMORPHISME, SANS LES GARDER TOUTES
EN MÉMOIRE. T. WALSH, LACIM

(partie 1)

GÉNÉRATION DES CARTES ET HYPER-
CARTES. UNE DANS CHAQUE CLASSE
D'ISOMORPHISME, SANS LES GARDER TOUTES
EN MÉMOIRE. T. WALSH, LACIM

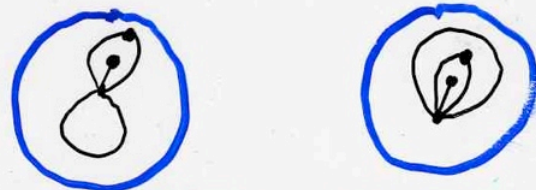
CARTE: PLONGEMENT 2-CELLULAIRE D'UN GRAPHE,
CONNEXE, BOUCLES ET ARÊTES PARALLÈLES
PERMISES, DANS UNE SURFACE (ICI,
ORIENTABLE ET SANS FRONTIÈRE).



MÊME GRAPHE, CARTES DISTINCTES.

ISOMORPHISME DES CARTES:

ISOMORPHISME DES GRAPHEs QUI
PRÉSERVE L'ORDRE CYCLIQUE DES
BRINS (DEMI-ARÊTES) AUTOUR DE CHAQUE SOMMET

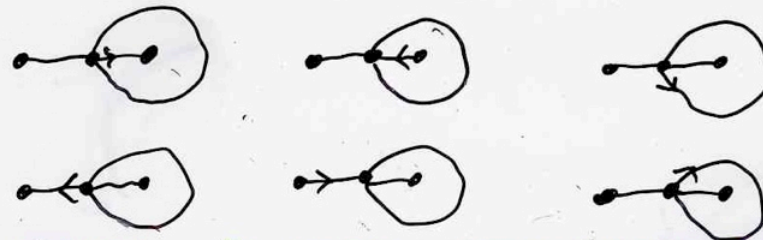


DEUX CARTES ISOMORPHES.

CARTE POINTÉE: CARTE AVEC UN BRIN
DISTINGUÉ, SA RACINE.

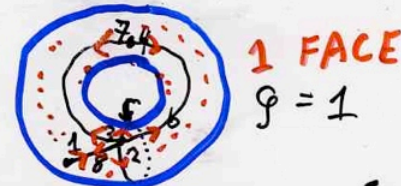
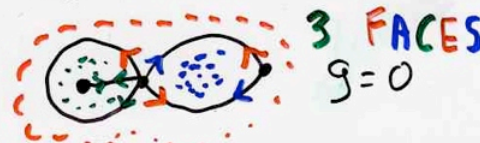
SEUL L'AUTOMORPHISME TRIVIAL D'UNE
CARTE POINTÉE PRÉSERVE LA RACINE.

UNE CARTE $\rightarrow$ $\frac{\# \text{BRINS}}{\# \text{AUTOMORPHISMES}}$ CARTES POINTÉES.



SIX BRINS, 2 AUTOMORPHISMES (TRIVIAL, $\curvearrowright$)
= 3 CARTES POINTÉES.

FACE: CYCLE DE LA PERMUTATION P -
SUR LES BRINS: D'ABORD - (ALLER À
L'AUTRE CÔTÉ DE L'ARÊTE, PUIS P (ALLER AU
PROCHAIN BRIN DANS L'ORDRE CYCLIQUE AUTOUR
DU MÊME SOMMET: ROTATION ANTI-HORAIRE).



GENRE g DÉTERMINÉ PAR EULER-POINCARÉ:

$$\overset{\uparrow}{n} - \overset{\uparrow}{m} + \overset{\uparrow}{f} = 2(1 - g).$$

#SOMMETS #ARÊTES #FACES

LA GÉNÉRATION SERT À VÉRIFIER LES NOMBRES D'OBJETS DÉNOMBRES PAR D'AUTRES MÉTHODES ET À DÉNOMBRER LES OBJETS POUR LESQUELS D'AUTRES MÉTHODES DE DÉNOMBREMENT N'ONT PAS ÉTÉ TROUVÉES. (2)

LE DÉNOMBREMENT DES CARTES A QUELQUES APPLICATIONS:

- W. TUTTE A COMMENCÉ LE DÉNOMBREMENT DES CARTES POUR ESSAYER DE RÉSOUDRE LE PROBLÈME FAMEUX DE QUATRE COULEURS.
- A. B. LEHMAN A ÉTUDIÉ LE DÉNOMBREMENT DES CARTES POUR ANALYSER LA STRUCTURE MOLECULAIRE DES POLYMERS.
- IL Y A AUSSI DES APPLICATIONS À LA COMBINATOIRE CLASSIQUE ET ALGÈBRE, LA PHYSIQUE THÉORIQUE ET LES HIÉRARCHIES INTÉGRABLES.

POUR ENGENDRER LES CARTES J'UTILISE UN CODE, INVENTÉ PAR MON ANCIEN DIRECTEUR DES ÉTUDES DOCTORALES A. B. LEHMAN, POUR LES CARTES POINTÉES.

CODE DE A. B. LEHMAN POUR LES 3

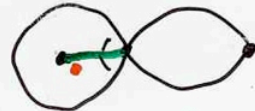
CARTES POINTÉES. BRIN COURANT $\hat{b}$ = RACINE.

• VOUS ÊTES ICI



NOUVELLE ARÊTE.
SOMMET $\hat{a}$ - $\hat{b}$ NOUVEAU.

ENCLURE L'ARÊTE $\{\hat{b}, -\hat{b}\}$
DANS L'ARBRE, ÉCRIRE (,
ALLER À $P(-\hat{b})$



ANCIENNE ARÊTE, DANS
L'ARBRE, ÉCRIRE).
ALLER À $P(\hat{b})$



NOUVELLE ARÊTE,
SOMMET $\hat{a}$ - $\hat{b}$ ANCIEN,
NUMÉROTTER L'ARÊTE,
ÉCRIRE CE NUMÉRO.
ALLER À $P(\hat{b})$



NOUVELLE ARÊTE,
SOMMET $\hat{a}$ $\hat{b}$ NOUVEAU



NOUVELLE ARÊTE,
SOMMET $\hat{a}$ - $\hat{b}$ ANCIEN



ANCIENNE ARÊTE DANS
L'ARBRE



ANCIENNE ARÊTE NUMÉROTÉE,
ÉCRIRE CE NUMÉRO,
ALLER À $P(\hat{b})$



ANCIENNE ARÊTE
NUMÉROTÉE



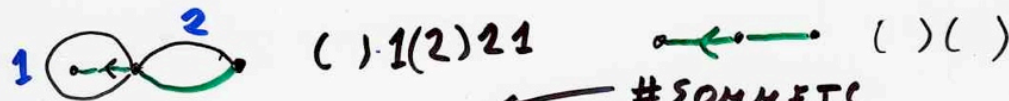
ON EST À LA RACINE. FIN!

PROPRIÉTÉS DES MOTS QUI CODENT UNE CARTE POINTÉE

CHAQUE LETTRE $\leftrightarrow$ UN BRIN

$$\# \text{ LETTRES} = \# \text{ BRINS} = 2m \quad \swarrow \# \text{ ARÊTES}$$

LE SOUS-MOT DES PARENTHÈSES EST UN MOT DE DYCK QUI CODE L'ARBRE DE RECOUVREMENT.



$$\# \text{ LETTRES} = 2(n-1) \quad \swarrow \# \text{ SOMMETS}$$

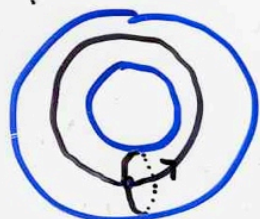
LE SOUS-MOT DES ENTIERS CODE LA CARTE POINTÉE OBTENUE EN CONTRACTANT TOUTES LES ARÊTES DE L'ARBRE DE RECOUVREMENT.



$$n=1 \quad m=2 \quad f=3 \\ g=0$$

$$\# \text{ LETTRES} = 2(m-n+1).$$

CETTE CONTRACTION NE CHANGE PAS $F (= \# \text{ FACES})$ ET DONC NE CHANGE PAS g (GENRE).



$$n=1 \quad m=2 \quad f=1 \quad g=1 \\ 1212$$

ET BIEN SÛR, LES PREMIÈRES OCCURRENCES DES ENTIERS SONT EN ORDRE CROISSANT:

$$1, 2, 3, \dots, m-n+1$$

(5)

THÉORÈME DE LEHMAN: UN MOT DE DYCK MÉLANGÉ AVEC UN MOT DE PAIRES DES ENTIERS $1, 2, \dots, m-n+1$, OÙ LES PREMIÈRES OCCURRENCES SONT EN ORDRE CROISSANT, CODE UNE CARTE POINTÉE $\leftrightarrow$ LE MOT NE CONTIENT AUCUN SOUS-MOT INTERDIT: $\dots(i \dots (\dots i \dots) \dots$ (LETTRES PAS FORCÉMENT CONTIGUES)

$\nwarrow$
 $\uparrow$
 ÉPOUX

ILLUSTRATION: LE MOT $1(1)$ CODE CETTE CARTE POINTÉE $\rightarrow$ AVEC LE MAUVAIS ARBRE, QUI INDIQUE QU'À PARTIR DE LA RACINE b , LE SOMMET x DE $-b$ ÉTAIT NOUVEAU ET IL FALLAIT Y ALLER MAIS ON NE L'A PAS FAIT.



À NOTER: POUR LES CARTES PLANAIRES LE SOUS-MOT D'ENTIER PEUT ÊTRE REMPLACÉ PAR UN MOT DE DYCK EN CROCHETS:

 $() 1 (2) 2 1$ DEVIENT $() [([)]]$

SOUS-MOT INTERDIT: $\dots [\dots (\dots] \dots$

PROCESSUS DE GÉNÉRATION

(6)

1. ON ENGENDRE TOUS LES MOTS AVEC
 $m-n+1$ PAIRES D'ENTRIERS. (OU CROCHETS)

1979: ORDRE LEXICOGRAPHIQUE

2011: CODE GRAY

1	1	2	2	3	3			
1	1	2		3	2	3		
1	1	2		3	3	2		
1		2	1	2	3	3		
1		2	1		3	2	3	
1		2	1		3	3	2	
1		2	2	1	3	3		
1		2	2		3	1	3	
1		2	2		3	3	1	
1		2		3	1	2	3	
1		2		3	1	3	2	
1		2		3		2	1	3
1		2		3		2	3	1
1		2		3		3	1	2
1		2		3		3	2	1

1	1	2	2	3	3			
1	1	2		3	2	3		
1	1	2		3	3	2		
1		2	1	3	3	2		
1		2	1		3	2	3	
1		2	1	2	3	3		
1		2	2	1	3	3		
1		2	2		3	1	3	
1		2		3	2	1	3	
1		2		3	1	2	3	
1		2		3		1	3	2
1		2		3		3	1	2
1		2		3		3	2	1
1		2		3		2	3	1
1		2		3		3	1	

