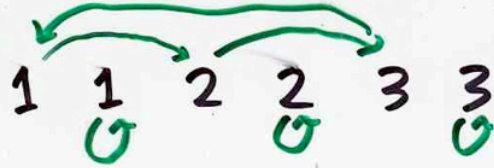


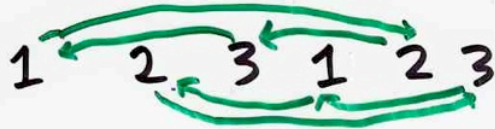
GÉNÉRATION DES CARTES ET HYPER-
CARTES. UNE DANS CHAQUE CLASSE
D'ISOMORPHISME, SANS LES GARDER TOUTES
EN MÉMOIRE. T. WALSH, LACIM

(partie 2)

2. POUR CHAQUE MOT, ON COMPTE LES
FACES (CYCLES DE P-).



$$f=4 \quad m=3 \quad n=1 \\ g=0$$



$$f=2 \quad m=3 \quad n=1 \\ g=1$$

3. POUR CHAQUE MOT D'ENTRIERS ON
ENGENDRE TOUS LES MOTS DE DYCK
AVEC $n-1$ PAIRES DE PARENTHÈSES:

() () ()
() (())
(()) ()
(() ())
((()))

1975 ET 2011: ORDRE LEXICOGRAPHIQUE
BIEN QU'IL Y AIT DES CODES GRAY.

4. POUR CHAQUE MOT D'ENTIER ET (8)
 CHAQUE MOT DE DYCK ON INSÈRE
 LE MOT DE DYCK DANS LE MOT D'ENTIER
 DE TOUTE FAÇON QUI NE CRÉE PAS LE
 GROS MOT $i(i)$.

ORDRE DE PRIORITÉ:

LE (LE PLUS À GAUCHE,

SON ÉPOUX,

LE (LE 2^{ème} PLUS À GAUCHE,

SON ÉPOUX, ETC.

$(()) 1$ 1

$(() 1)$ 1

$((1))$ 1

$(1 ())$ 1

$(1 () 1)$

CETTE PARENTHÈSE NE PEUT PAS PASSER CET ENTIER

$(1 1 ())$

$1 (()) 1$

CETTE PARENTHÈSE NE PEUT PAS PASSER CET ENTIER

$1 1 (())$

QUAND UNE PARENTHÈSE AVANCE, TOUTES CELLES
 AVEC UNE PRIORITÉ PLUS BASSE COMMencent LE PLUS
 À GAUCHE POSSIBLE. 1979: ON LES ENLÈVE ET
 LES REINSÈRE. 2011: ON LES REMPLACE PAR
 DES SIGNETS. ON DÉPLACE LES SIGNETS À GAUCHE
 ET PUIS LES REMPLACE PAR LES PARENTHÈSES.
 TEMPS $O(n)$ AU PIÈRE CAS AU LIEU DE $O(n^2)$.

COMMENT CHOISIR UN REPRÉSENTANT DANS CHAQUE CLASSE D'ISOMORPHISME?

POUR CHAQUE MOT ENGENDRÉ, ON LE DÉCODE EN $O(m)$ TEMPS. PUIS ON ESSAIE TOUT BRIN COMME RACINE ET ON CODE CETTE CARTE POINTÉE. SI AUCUN NOUVEAU MOT N'EST PLUS GRAND QUE L'ANCIEN EN ORDRE LEXICOGRAPHE $(=0) = -1$, C'EST LE REPRÉSENTANT.

RACCOURCI: SI UNE NOUVELLE LETTRE EST PLUS GRANDE QUE L'ANCIENNE DANS LA MÊME POSITION, ON RETÈTE L'ANCIEN MOT, ET SI UNE NOUVELLE LETTRE EST PLUS PETITE, ON TERMINE LE CODAGE AVEC CE BRIN.

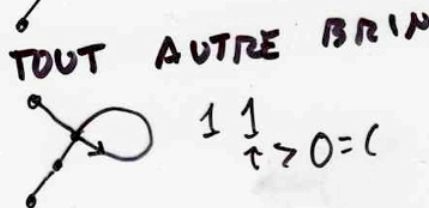


1 () () 1

MÊME CHOSE POUR TOUT AUTRE BRIN COMME RACINE SAUF



$(=0 < 1$
FIN DE CODAGE



1 1
↑ 0 = (

ANCIEN MOT RETETÉ.

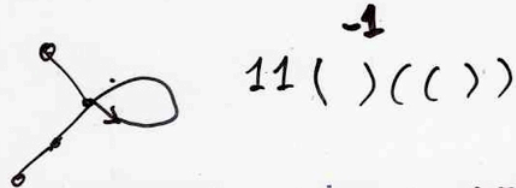


1 1 () ()

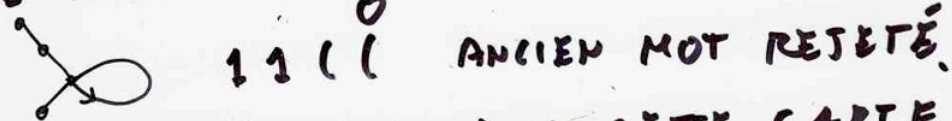
≥ TOUT MOT QUI CODE LA MÊME CARTE,

DONC ACCEPTÉ.

GÉNÉRALISATION AUX ISOMORPHISMES QUI SOIT PRÉSERVENT L'ORDRE CYCLIQUE DES BRINS AUTOUR DE CHAQUE SOMMET, SOIT RENVERSE TOUS LES ORDRES. (10)



ON RENVERSE TOUS LES ORDRES ET ON CODE AVEC CHAQUE BRIN COMME RACINE.



PUIS QUAND LE CODE POUR CETTE CARTE POINTÉE EST ENGENDRÉ: 11(()) () IL SERA ACCEPTÉ.

CE TRAVAIL A ÉTÉ FAIT EN 1979 EN URSS SUR UN ORDINATEUR AVEC UN PROCESSEUR À 10 MHz ET UNE LIMITE DE 5 MINUTES DE TEMPS CPU. SOUS CES CONDITIONS JE N'AI PU ENGENDRER DE CARTES QU'AVEC ≤ 6 ARÊTES (ENVIRON 100000 CARTES POINTÉES).

EN 2011, AVEC DES OPTIMISATIONS, UN MAC PORTABLE AVEC 2 PROCESSEURS À 2.66 GHz ET AUCUNE LIMITE SUR LE TEMPS J'AI PU ALLER JUSQU'À 11 ARÊTES (UNE SEMAINE DE CALCUL, ENVIRON 300000000000 CARTES POINTÉES).

LES NOMBRES VÉRIFIENT LES NOMBRES ^{III}
DE CARTES POINTÉES (WALSH, 1971),
CARTES À ISOMORPHISME PRÈS
(WALSH, GIORGETTI, MEDNYKH, ACCEPTÉ)
ET CARTES PLANAIRE À ISOMORPHISME
GÉNÉRALISÉ PRÈS (WORMALD 1980).
POUR LES CARTES NON-PLANAIRE MES NOMBRES SONT NOUVEAUX.
ANALYSE DE COMPLEXITÉ (2011)

UNE CARTE AVEC m ARÊTES A $2m$
BRINS, DONC IL Y A $2m$ RACINES POSSIBLES.
SI CHAQUE BRIN DONNE LE MÊME MOT
IL FAUT TESTER CHAQUE BRIN ET
CONSTRUIRE CHAQUE MOT AU COMPLET.
TEMPS AU PIRE CAS POUR TESTER SI
UN MOT EST LE REPRÉSENTANT $\Theta(m^2)$
AU PIRE CAS. MAIS PUISQUE

PRESQUE TOUTES LES CARTES N'ONT
QUE L'AUTOMORPHISME TRIVIAL,
LE TEMPS AU MOYEN CAS EST DOMINÉ
PAR LE TEMPS $O(m)$ POUR
DÉCODER UN MOT.

SUPPOSONS QUE TOUT BRIN DONNE UN MOT ^(1/2)
DIFFÉRENT (PRESQUE TOUJOURS).

SI LE MOT COURANT EST LE i -IÈME PLUS
PETIT PARMİ CES $2m$ MOTS, LE

NOMBRE ESPÉRÉ DE BRINS QU'IL FAUT
ESSAYÉ COMME RACINE AVANT DE RETENTER

LE MOT ANCIEN = # ESPÉRÉ DE BALLES

QU'IL FAUT ENLEVER D'UNE URNE AVEC
 $i-1$ BALLES NOIRES ET $2m-i$ BALLES

BLANCHES SANS REMPLACEMENT AVANT
D'ENLEVER UNE BALLE BLANCHE

$$\leq \# \text{ ESPÉRÉ AVEC REMPLACEMENT} \\ \leq p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2p + \dots = 1/p,$$

$$\text{OÙ } p = (2m-i)/(2m-1),$$

SAUF SI $i=2m$, ET PUIS IL FAUT
TESTER TOUS LES $2m$ BRINS.

POUR $i=1, 2, 3, \dots, 2m-1, 2m$, ÇA DONNE
UNE BORNE SUPÉRIEURE DE

$$2m + (2m-1) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right) \sim 2m \ln m.$$

POUR TOUTES LES CARTES POINTÉES
QUI VIENNENT DE LA MÊME CARTE OU
 $O(\ln m)$ POUR CHACUNE DE CES
CARTES POINTÉES.

COMBIEN DE LETTRES DU NOUVEAU MOT FAUT-IL
CONSTRUIRE AU CAS MOYEN? (13)

SOIT i LA PLUS PETIT INDEX TEL
QUE LA i ÈME LETTRE DU NOUVEAU
MOT DIFFÈRE DE LA i ÈME LETTRE DE
L'ANCIEN MOT. LA VALEUR ESPÉRÉ

DE i EST $\leq p + 2p(1-p) + 3p(1-p)^2 + \dots = \frac{1}{p}$,

OÙ p EST LA PROBABILITÉ QUE
DEUX LETTRES CHOISIES AU HAZARD
D'UN ALPHABET AVEC q LETTRES SONT
DIFFÉRENTES. $p = \frac{q-1}{q}$, D'OÙ $\frac{1}{p} = \frac{q}{q-1}$,

ET PUISQUE $q \geq 2$ (ÉGALITÉ SI
LA CARTE EST UN ARBRE)*, C'EST

UNE CONSTANTE. EXCEPTIONS: VIDE ET 11

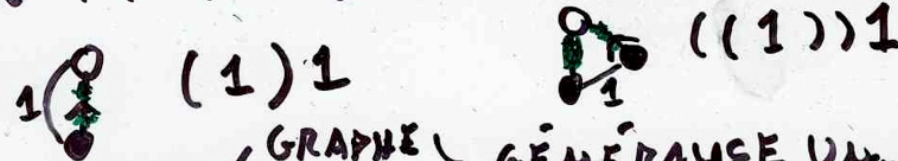
MAIS POUR CHAQUE CODAGE IL FAUT
INITIALISER TOUS LES SOMMETS À
"NOUVEAU", DONC LA COMPLEXITÉ
MOYENNE POUR VÉRIFIER LA MAXIMALITÉ
EST $O(m \log m)$, QUI EST QUAND
MÊME MEILLEURE QUE $O(m^2)$.

LES TEMPS DE CALCUL EXPÉRIMENTAUX
CONFIRMENT CETTE ANALYSE.

GÉNÉRATION DES HYPERCARTES

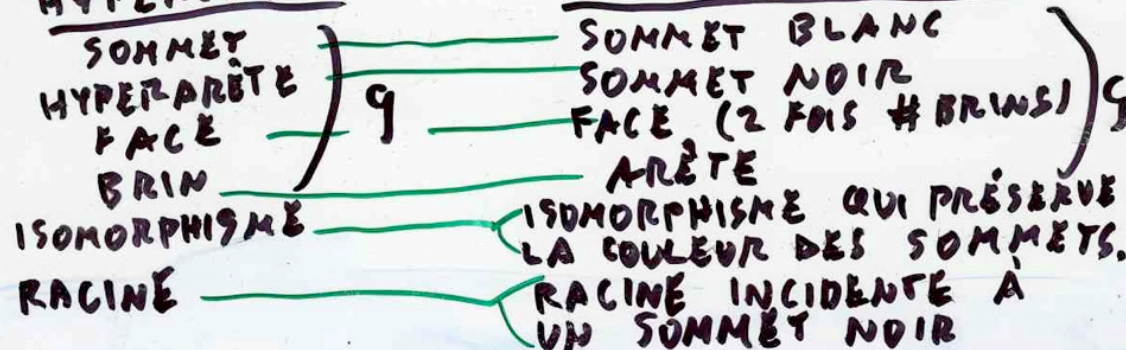
LA CARTE POINTÉE CODÉE PAR LE CODE DE LEHMAN EST BIPARTITE

(SOMMETS BLANCS ET SOMMETS NOIRS, AUCUNE ARÊTE NE LIE 2 SOMMETS DE LA MÊME COULEUR OU UN SOMMET À LUI-MÊME)
 $\leftrightarrow$ ENTRE CHAQUE PAIRE D'ENTRIERS PARBILS IL Y A UN NOMBRE (IMPAIR DE PARENTHÈSES)



UN_(E) HYPER $\left\{ \begin{array}{l} \text{GRAPHE} \\ \text{CARTE} \end{array} \right\}$ GÉNÉRALISE UNE $\left\{ \begin{array}{l} \text{GRAPHE} \\ \text{CARTE} \end{array} \right\}$
 CHAQUE (HYPER) ARÊTE PEUT AVOIR N'IMPORTE QUEL NOMBRE DE BRINS (AU LIEU DE 2).

EN 1975 J'AI PUBLIÉ UNE BIJECTION
HYPERCARTE $\longleftrightarrow$ CARTE BIPARTITE



AINSI J'AI ENGENDRÉ LES HYPERCARTES POINTÉES, ORIENTÉES ET NON-ORIENTÉES AVEC ≤ 9 BRINS
 PROJET: OBTENIR DES FONCTIONS GÉNÉRATIVES POUR LES NOMBRES AVEC A. GIROGETTI ET A. MEON YKH.

